令和６年度入学試験問題

数　　学（理，医，歯，工学部）

注 意 事 項

1　この問題冊子は，試験開始の合図があるまで開いてはならない。

2　問題冊子は，全部で６ページある。（落丁，乱丁，印刷不鮮明の箇所などがあった場合は申し出ること。）

　別に解答用紙がある。

3　**解答はすべて，問題ごとに指定された解答用紙に記入すること。指定と異なる解答用紙に記入された解答は零点となる。**

4　受験番号は，各解答用紙の指定された２箇所に必ず記入すること。

5　受験学部，学科，選抜方法により解答すべき問題（○印），解答用紙の枚数及び解答時間は，下表のとおりである。

受験学部（学科，選抜方法）	解答すべき問題（○印）						解答用紙の枚数	解答時間
	1	2	3	4	5	6		
理学部（理数重点選抜）及び工学部	○	○	○	○	○		５枚	120分
理学部（野外科学志向選抜）及び医学部（保健学科）	○	○	○	○			４枚	90分
医学部（医学科）			○	○	○	○	４枚	90分
歯学部		○	○	○	○		４枚	90分

6　下書きは，問題冊子の余白を使用すること。

7　問題冊子は，持ち帰ること。

1 $f(x)=\dfrac{e^x}{e^x+1}$ とする。曲線 $C\colon y=f(x)$ の点 $\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$ における接線を ℓ とする。次の問いに答えよ。

(1) $\displaystyle\int f(x)dx$ を求めよ。

(2) 接線 ℓ の方程式を求めよ。

(3) 曲線 C と接線 ℓ は点 $\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$ 以外に共有点を持たないことを示せ。

(4) 曲線 C, 接線 ℓ, y 軸および直線 $x=1$ で囲まれる図形の面積を求めよ。

2

座標平面の原点を O とし，3 点 $A(-2, 0)$，$B(\cos\theta, \sin\theta)$，$C(3\cos 3\theta, 3\sin 3\theta)$ をとる。ただし，$0 \leqq \theta \leqq \dfrac{2\pi}{3}$ とする。次の問いに答えよ。

(1) AB^2 と BC^2 を $\cos\theta$ を用いて表せ。

(2) $0 \leqq \theta \leqq \dfrac{2\pi}{3}$ のとき，$AB^2 + BC^2$ の最大値と最小値を求めよ。また，そのときの点 B と点 C の座標をそれぞれ求めよ。

3 座標空間において, 3 点 $\mathrm{A}(1,0,0)$, $\mathrm{B}(0,-1,0)$, $\mathrm{C}(0,0,-2)$ の定める平面を α とし, 方程式 $x^2+y^2+z^2+2x-10y+4z+21=0$ が表す球面を S とする。次の問いに答えよ。

(1) 球面 S の中心 P の座標と S の半径を求めよ。

(2) 実数 s, t に対して, 点 D を $\overrightarrow{\mathrm{AD}}=s\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ を満たすようにとる。このとき, D の座標を s, t を用いて表せ。

(3) 点 Q が平面 α 上を動き, 点 R が球面 S 上を動くとき, Q と R の距離の最小値を求めよ。また, そのときの Q と R の座標をそれぞれ求めよ。

4 n, k を自然数とする。n 個のボールと k 個の箱がある。各箱は箱 1, 箱 2, $\cdots$, 箱 k のように表すものとする。n 個のボールを k 個の箱へ投げ入れる。各ボールはいずれかの箱に入るものとし, どの箱に入る確率も等しいとする。n 個のボールを投げ入れた後, 箱 i $(i = 1, 2, \cdots, k)$ に入っているボールの個数を a_i とする。このとき, $a_1 + a_2 + \cdots + a_k = n$ となる。次の問いに答えよ。

(1) $n = 4$, $k = 5$ とする。このとき, $a_1 = 0$ となる確率を求めよ。

(2) $k \geqq 2$ とする。このとき, $a_1 \times a_2 = 0$ となる確率を n, k を用いて表せ。

(3) $k = 4$ とする。このとき, $a_1 \times a_2 \times a_3 \times a_4 \neq 0$ となる確率を p_n とする。p_n の値を n を用いて表せ。

(4) $k = 4$ とし, p_n を (3) で求めたものとする。このとき, $r > 0$ で数列 $\{r^n(p_{n+1} - p_n)\}$ が収束するような r の値の範囲を求めよ。

$\boxed{5}$ a を $0 < a < 1$ となる実数とする。座標平面上において，長さが 4 の線分 PQ を考える。線分 PQ の端点 P は x 軸上を，端点 Q は y 軸上を動くとき，線分 PQ を $a : (1-a)$ の比に内分する点 R の軌跡は楕円になる。この楕円を C とする。ただし，円は楕円の特別な場合とする。次の問いに答えよ。

(1) 楕円 C の方程式を a を用いて表せ。

(2) 楕円 C で囲まれた部分と連立不等式

$$\begin{cases} x \geqq 0 \\ \sqrt{3}ax \geqq (1-a)y \end{cases}$$

の表す領域の共通部分の面積を S とする。S を a を用いて表せ。

(3) 面積 S の最大値とそのときの a の値を求めよ。

6

実数 t に対して, 複素数 z を次の条件 (I), (II) を満たすようにとる。

(I) z の虚部は 0 以上である。

(II) $z^2 - 2t^3 z + t^6 + 9t^2 = 0$

この z に対して, 複素数 w を $w = i\overline{z}$ とおく。ただし, i は虚数単位とし, $\overline{z}$ は z の共役複素数とする。次の問いに答えよ。

(1) 複素数 z と w を t を用いて表せ。

(2) $0 \leqq t \leqq 2$ のとき, $|z - w|$ の最大値を求めよ。また, そのときの t の値をすべて求めよ。

(3) 実数 t を動かしたとき, 複素数平面上で z が表す点が描く曲線を C_1 とし, w が表す点が描く曲線を C_2 とする。C_1 と C_2 で囲まれる図形の面積を求めよ。