$\boxed{1}$ 解答例

問 1 自然長よりの縮みを ℓ とすると，ばねのつり合いの式より，$\ell = \frac{Mg}{k}$

問 2 衝突直前の速さを v_0 とおくと，エネルギー保存則より，$\frac{1}{2}mv_0^2 = mgh$ である。したがって，$v_0 = \sqrt{2gh}$ となる。

問 3 衝突後の台の速さを V，小球の速さを v とすると，運動量保存則より $-mv_0 = -MV + mv$ となる。一方、弾性衝突より，$\frac{V+v}{v_0} = 1$ である。これらを解いて，$V = \dfrac{2m}{M+m}v_0 = \dfrac{2m}{M+m}\sqrt{2gh}$，　$v = \dfrac{M-m}{M+m}v_0 = \dfrac{M-m}{M+m}\sqrt{2gh}$ となる。

問 4 衝突の後，台はつり合いの位置を中心とした単振動をする。台が最低点に到達するのは単振動の周期の $1/4$ であるので，単振動の周期より $t_A = \dfrac{\pi}{2}\sqrt{\dfrac{M}{k}}$ となる。

問 5 衝突後，小球は鉛直方向に初速 v の投げ上げ運動をする。小球が再び衝突した高さまで落下する時間を t_B とすると，$vt_B - \frac{1}{2}gt_B^2 = 0$ より，$t_B = \dfrac{2v}{g} = 2\dfrac{M-m}{M+m}\dfrac{v_0}{g} = 2\dfrac{M-m}{M+m}\sqrt{\dfrac{2h}{g}}$ となる。台が再びつり合いの位置にやってくるのは，$2t_A$ であるので，$t_B = 2t_A$ より，$h = \dfrac{\pi^2}{8}\left(\dfrac{M+m}{M-m}\right)^2\dfrac{Mg}{k}$ となる。

問 6 衝突後の一体となった速さを v' とすると，運動量保存則より $mv_0 = (M+m)v'$ となるので，$v' = \dfrac{m}{M+m}v_0 = \dfrac{m\sqrt{2gh}}{M+m}$ となる。

問 7 鉛直下向きを正とし，ばねの自然長からの縮みを x および小球と台加速度を a とする。台と小球間の抗力の大きさを N とすると運動方程式は，$Ma = Mg + N - kx$，$ma = mg - N$ となる。これらより，$N = \frac{m}{M+m}kx$ となる。

問 8 小球が台から離れるのは $N = 0$ となるとき，すなわち，ばねが自然長の位置 $(x = 0)$ に到達したときである。x の最小値は，運動エネルギーの保存則より，$\frac{1}{2}k(\frac{Mg}{k})^2 + \frac{1}{2}(M+m)v'^2 = \frac{1}{2}kx^2 - (m+M)g(x - \frac{Mg}{k})$ より求まる。これを解くと，$x = \frac{M+m}{k}g - \sqrt{(\frac{mg}{k})^2 + \frac{2m^2gh}{k(M+m)}}$ となる。これより $x < 0$ となる条件を整理すると，$\frac{2m^2gh}{k(M+m)} > (\frac{(m+M)g}{k})^2 - (\frac{mg}{k})^2 \Leftrightarrow h > \dfrac{M(M+m)(M+2m)g}{2m^2k} = h_c$ となる。

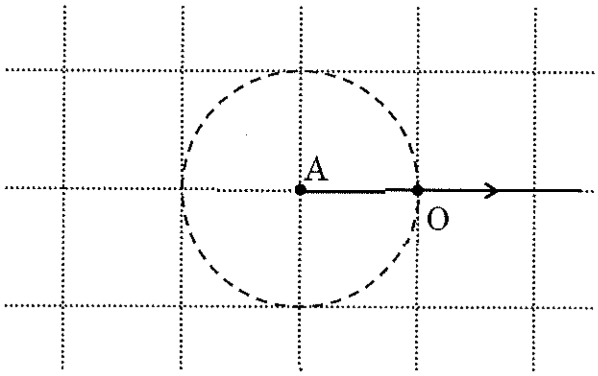
別解

小球と台は一体となり単振動をするが，その中心位置は自然長より $(m+M)g/k$ だけ下方である。単振動の振幅を A とするとエネルギー保存則より $\frac{1}{2}k(\frac{mg}{k})^2 + \frac{1}{2}(m+M)v'^2 = \frac{1}{2}kA^2$ となる。これより，振幅は $A = \sqrt{(\dfrac{mg}{k})^2 + \dfrac{2m^2gh}{k(M+m)}}$ となる。したがって，小球が台から離れるためには振幅が $A > (m+M)g/k$ を満たさなければならないことより，h_c が求まる。

$\boxed{2}$解答例

［1］

問１



（xy平面）

問２　向き：y軸の正の方向　（OからCの向き）

大きさ：$\left|\overrightarrow{E_c}\right| = 2 \times \left(k_0 \frac{Q}{(2d)^2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = k_0 \frac{\sqrt{3}Q}{4d^2}$

問３　$V_O = 2k_0 \frac{Q}{d}$，$V_C = 2 \times k_0 \frac{Q}{2d} = k_0 \frac{Q}{d}$

問４　点Oで速さがゼロ以上のとき点Oに到達する。vが最小のとき点Oでは速さがゼロであり，エネルギー保存則より$\frac{1}{2}mv^2 + qV_C = qV_O$。$\therefore v = \sqrt{\frac{2q(V_O - V_C)}{m}} = \sqrt{\frac{2k_0 qQ}{md}}$

［2］

問１　$C_0 = \varepsilon_0 \frac{S}{d}$

問２　$Q_0 = \varepsilon_0 \frac{S}{d} V$

問３　極板間の電場の強さは$E = \frac{V}{d}$であり，$F_1 = \frac{1}{2} Q_0 \left(\frac{V}{d}\right) = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \frac{S}{d} V \left(\frac{V}{d}\right)$ $\therefore F_1 = \frac{\varepsilon_0 S V^2}{2d^2}$

問４　極板間の間隔の差$a-d$によるばねの力と極板P_1の電場による力のつりあいから，$k(a-d) = F_1$。問３より$k(a-d) = \frac{\varepsilon_0 S V^2}{2d^2}$，ただし$V > 0$。$\therefore V = d\sqrt{\frac{2k(a-d)}{\varepsilon_0 S}}$

（∵重力とのつり合いは省略できる。極板の質量m，重力加速度の大きさg，ばねの自然の長さからの伸び$\Delta\ell$とすると，$k\Delta\ell = mg$。力のつり合いは$k(\Delta\ell + a - d) = F_1 + mg$ $\therefore k(a-d) = F_1$）

問５　コンデンサーAの電気量がQ_Aのとき，電荷保存より，コンデンサーBの電気量は$Q_0 - Q_A$となる。並列接続で各コンデンサーの電位差は等しくなるので，$\frac{Q_A}{\varepsilon_0 \frac{S}{b}} = \frac{Q_0 - Q_A}{\varepsilon_0 \frac{S}{a}} \Leftrightarrow bQ_A = a(Q_0 - Q_A)$ $\therefore Q_A = \frac{a}{a+b} Q_0$

問６　このときの極板P_1の電場からはたらく力をF_1'，極板間の電圧をV'，電気容量をC_Aとすると，$F_1' = \frac{1}{2} Q_A \left(\frac{V'}{b}\right) = \frac{1}{2} Q_A \left(\frac{Q_A / C_A}{b}\right) = \frac{1}{2} Q_A \left(\frac{Q_A / \varepsilon_0 \frac{S}{b}}{b}\right) = \frac{1}{2\varepsilon_0 S} {Q_A}^2$

ばねにはたらく力のつり合いから，$k(a-b) = \frac{1}{2\varepsilon_0 S} {Q_A}^2 \Leftrightarrow k(a-b) = \frac{1}{2\varepsilon_0 S}\left(\frac{a}{a+b} Q_0\right)^2 \Leftrightarrow$

$k(a-b) = \frac{1}{2\varepsilon_0 S}\left(\frac{a}{a+b}\varepsilon_0 \frac{S}{d} V\right)^2 \Leftrightarrow k(a-b) = \frac{1}{2\varepsilon_0 S}\left(\frac{a}{a+b}\varepsilon_0 \frac{S}{d} d\sqrt{\frac{2k(a-d)}{\varepsilon_0 S}}\right)^2 \Leftrightarrow (a-b)(a+b)^2 = a^2(a-d)$　$\therefore d = a - \frac{(a-b)(a+b)^2}{a^2}$

（別解）$F_1 = k(a-d) = \frac{1}{2\varepsilon_0 S} {Q_0}^2$，$F_1' = k(a-b) = \frac{1}{2\varepsilon_0 S} {Q_A}^2 = \frac{1}{2\varepsilon_0 S} {Q_0}^2 \left(\frac{a}{a+b}\right)^2$であり，両辺を割れば，$\frac{a-d}{a-b} = \frac{1}{\left(\frac{a}{a+b}\right)^2} \Leftrightarrow \frac{a-d}{a-b} = \frac{(a+b)^2}{a^2}$ $\therefore d = a - \frac{(a-b)(a+b)^2}{a^2}$

3 〔1〕 解答例

問1 状態方程式より，$T_{\mathrm{A}} = \dfrac{2p_0 \times 3V_0}{R} = \dfrac{6p_0V_0}{R}$。

問2 A→B において，外部に仕事はしないので，熱力学第1法則から Q_{AB} は内部エネルギーの減少分に等しい。B における温度を T_{B} とすると，$T_{\mathrm{B}} = \dfrac{p_0 \times 3V_0}{R} = \dfrac{3p_0V_0}{R}$ なので，$Q_{\mathrm{AB}} = \dfrac{3}{2}R(T_{\mathrm{A}} - T_{\mathrm{B}}) = \dfrac{9}{2}p_0V_0$。

問3 $W_{\mathrm{CD}} = 3p_0V_0$。
C における温度を T_{C} とすると，$T_{\mathrm{C}} = \dfrac{3p_0V_0}{R}$。また，D における温度を T_{D} とすると，$T_{\mathrm{D}} = \dfrac{6p_0V_0}{R}$。C→D は定圧変化なので，$Q_{\mathrm{CD}} = \dfrac{5}{2}R(T_{\mathrm{D}} - T_{\mathrm{C}}) = \dfrac{15}{2}p_0V_0$。

問4 $T_{\mathrm{D}} = T_{\mathrm{A}}$ より，内部エネルギーの変化はゼロ。またこのとき気体が外にする仕事は $W_{\mathrm{DA}} = \frac{1}{2}(3p_0 + 2p_0)V_0 = \frac{5}{2}p_0V_0$。したがって，$Q_{\mathrm{DA}} = W_{\mathrm{DA}} = \frac{5}{2}p_0V_0$。

問5 D→A における圧力は $p = -\dfrac{p_0}{V_0}(V - 2V_0) + 3p_0$ と表されるので，$RT = pV = \left(-\dfrac{p_0}{V_0}(V - 2V_0) + 3p_0\right)V = -\dfrac{p_0}{V_0}\left(V^2 - 5V_0V\right) = -\dfrac{p_0}{V_0}\left(V - \dfrac{5}{2}V_0\right)^2 + \dfrac{25}{4}p_0V_0$。
よって，温度が最も高くなるのは，$V_{\mathrm{E}} = \dfrac{5}{2}V_0$，$p_{\mathrm{E}} = \dfrac{5}{2}p_0$ のときで，その温度は $T_{\mathrm{E}} = \dfrac{25}{4}\dfrac{p_0V_0}{R}\left(= 6.25\dfrac{p_0V_0}{R}\right)$。

問6 熱効率 e は熱機関が高熱源から吸収した熱量 Q_1 と外部にした仕事 W' の比 $e = \dfrac{W'}{Q_1}$ で与えられる。B と C では，温度が同じなので内部エネルギーが等しく，熱機関がされた仕事 $3.3p_0V_0$ の分だけ，熱機関は熱を放出する。したがって，気体が熱を吸収する過程は，C→D と D→A。したがって $Q_1 = Q_{\mathrm{CD}} + Q_{\mathrm{DA}} = \frac{15}{2}p_0V_0 + \frac{5}{2}p_0V_0 = 10p_0V_0$。一方，熱機関が外部にする正味の仕事は，$W' = W_{\mathrm{CD}} + W_{\mathrm{DA}} - 3.3p_0V_0 = 3p_0V_0 + \frac{5}{2}p_0V_0 - 3.3p_0V_0 = (\frac{11}{2} - 3.3)p_0V_0 = 2.2p_0V_0$。
したがって，熱効率は $e = \dfrac{W'}{Q_1} = \dfrac{2.2}{10} = 0.22$

$\boxed{3}$ 解答例

〔2〕

問 1　正弦波の式 $y = \mathcal{A}\sin 2\pi\left(\dfrac{t}{T} \pm \dfrac{x}{\lambda}\right)$ と比較し，正弦波の情報を読み取ります。

※ $\mathcal{A}$ は振幅，T は周期，λ は波長で，$\pm$ は波の進む向きから決まります。

※ 振動数は $f = \dfrac{1}{T}$，速さは $v = \dfrac{\lambda}{T} = f\lambda$ です。

※ 共通の係数 2π の部分を間違えても (2) と (3) には影響しません。

(1)〔答〕$\lambda_{\mathrm{A}} = \dfrac{2\pi}{9} = \dfrac{6.28}{9} = 0.70\,\mathrm{m}$

※ $y_{\mathrm{A}} = \sin(18t + 9x) = \sin 2\pi\left(\dfrac{t}{T_A} + \dfrac{x}{\lambda_A}\right)$ から T_A と λ_A が決まります。

(2)〔答〕x の負の向き。

〔答〕$v_A = \dfrac{18}{9} = 2.0\,\mathrm{m/s}$

※ $v_A = \dfrac{\lambda_A}{T_A}$ において $\lambda_A = \dfrac{2\pi}{9}$，$T_A = \dfrac{2\pi}{18}$ です。

(3)〔答〕周期 $T_B = 2\pi a$ が $T_A = \dfrac{2\pi}{18}$ の 2 倍なので，$a = \dfrac{2}{18} = \dfrac{1}{9} = 0.11\mathrm{s}$

〔答〕速さ $v_B = \dfrac{b}{a} = 9b$ が v_A の 3 倍なので，$b = \dfrac{3 \times 2.0}{9} = \dfrac{2.0}{3} = 0.67\mathrm{m}$

※ $\sin\left(\dfrac{t}{a} - \dfrac{x}{b}\right) = \sin 2\pi\left(\dfrac{t}{T_B} - \dfrac{x}{\lambda_B}\right)$ より，$T_B = 2\pi a,\ \lambda_B = 2\pi b,\ v_B = \dfrac{b}{a}$ です。

問 2 (1)〔答〕$f = 682 + 2 = 684\ \mathrm{Hz}$

※ 静止した音源に観測者が近づくとうなりが消えるので $f > 682\mathrm{Hz}$ です。

(2)〔答〕音速を V〔m/s〕として，$684 = \dfrac{V+1}{V} \times 682 = 682 + \dfrac{682}{V}$ より，$\dfrac{682}{V} = 2$

$$\therefore\ V = \frac{682}{2} = 341\ \mathrm{m/s}$$

※ドップラー効果 $f = \dfrac{V - v_{\mathrm{o}}}{V - v_{\mathrm{s}}} f_{\mathrm{s}}$　$(f = 684\mathrm{Hz},\ f_{\mathrm{s}} = 682\mathrm{Hz},\ v_{\mathrm{o}} = -1\mathrm{m/s},\ v_{\mathrm{s}} = 0)$