２０２２年２月２２日

新　潟　大　学

３次元領域における流れの計算機援用証明

− 数学の未解決問題へ挑む −

ナビエ・ストークス方程式は流体力学の基礎方程式であり、方程式の解の存在と滑らかさ（注 1）に関する未解決問題は米国・クレイ数学研究所の「ミレニアム懸賞問題[1]」として、多くの研究者に知られています。この難問に挑むため、従来の解析手法以外に、計算機援用証明（注 2）法も有力な方法として検討されています。1990 年代、日本の数学研究者・中尾充宏氏は 2 次元正方形領域における流れの検証に成功して、先駆的な研究成果を挙げました。しかしながら当時の手法では 3 次元領域における流れの検証は本質的に困難でした。今回、新潟大学理学部の劉雪峰准教授らの研究グループは、3 次元領域でのストークス方程式の誤差評価の難題を解決し、世界で初めて一般的な 3 次元領域における定常流れ（定常解、注 3）の検証に成功しました。

【本研究成果のポイント】

- **一般的な 3 次元領域におけるナビエ・ストークス方程式の定常解の計算機援用による検証例として、世界初の研究成果です。**
- **ナビエ・ストークス方程式の境界値問題（注 4）に対して、計算機を用いた数値計算方法と厳密な誤差評価理論を提案します。**

Ⅰ．研究の背景

ナビエ・ストークス方程式は流体の運動を記述している方程式です。この方程式は非線形偏微分方程式（注 5）の一種であり、方程式にある非線形項によって解（流れ）の構造が極めて複雑になっています。ナビエ・ストークス方程式の解の存在と滑らかさの問題については、多くの数学者が関心を持ち、多様な数学的な解析方法が検討されています。しかしながら現状では、我々の生活空間と同じである 3 次元空間の

[1] Clay Mathematics Institute: http://www.claymath.org/millennium-problems

設定の場合、滑らかな初期値条件の下であってさえも、方程式の解が安定であるかどうかも、数学的に解明されていません。

計算機を用いた数値計算手法で得られた方程式の近似解を利用して、流れの状態を数値シミュレーションによって解析することは可能ですが、計算に発生した離散化誤差（注 6）、丸め誤差（注 7）など様々な誤差があり、数学的に厳密な結論を導くのは大変困難です。

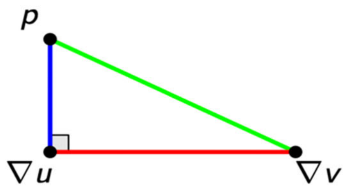
近年、科学計算の分野では、計算中に発生した誤差を厳密に評価する手法「精度保証付き数値計算法」が提案されています。日本では、早稲田大学の大石進一教授を中心とする研究グループが、この分野の研究を推進し、世界トップレベルの成果を上げています。

精度保証付き数値計算法を利用して、ナビエ・ストークス方程式の解を検証するとき、流体の非圧縮条件（divergence free）（注 8）の厳密処理や、関わる微分作用素の固有値問題（注 9）の厳密計算法などは大きなチャレンジです。1990 年代、日本の数学研究者・中尾充宏氏は 2 次元正方形領域における定常流れの検証に成功して、先駆的な研究成果を得ました。しかし、中尾氏の手法を 3 次元領域に適用する場合、ストークス方程式の境界値問題に対する近似解の事前誤差評価（注 10）に本質的困難性があり、過去 20 年以上、3 次元領域における流れの検証の研究は難航していました。

Ⅱ．研究の概要と成果

本研究ではストークス方程式の境界値問題に対する近似解の誤差評価において、「Hypercircle 法」を用いて、この難点を克服する新たな誤差評価法を提案しました。この手法により流体の非圧縮条件を厳密処理でき、さらに中尾氏の手法との融合によって、3 次元領域における定常流れの検証に成功しました。

1940 年代、W. Prager 氏と J. L. Synge 氏は、弾性力学の解析に関する Hypercircle 法を提案しました。図 1 のように、Hypercircle 法は複数の関数空間に関わり、ピタゴラスの定理のようなキレイな構造を持っています。また、同じ時期に、日本の数学者・加藤敏夫氏と藤田宏氏も Hypercircle 法とは本質的に同じである手法を提案して、偏微分方程式の近似解の誤差評価に適用しています。近年、Hypercircle 法は多くの数学者からも高い評価を受け、その方式の有用性が広く検討されています。2000 年代、菊地文雄氏も Hypercircle 法を利用して、有限要素法（注 11）を用いた偏微分方程式の近似解の事後誤差評価（注 12）を提案しました。



$$\|\nabla u - \nabla v\|^2 + \|\nabla u - p\|^2 = \|\nabla v - p\|^2$$

図 1：Hypercircle 法の構造

中尾氏は、境界値問題の有限要素近似と、その構成的事前誤差評価を区間解析と有効に組み合わせることにより、厳密解が計算機上で捉えられることを世界に先駆けて立証しました（1988）。この方式は、非線形偏微分方程式の有限要素近似解に対する数学的に厳密な事後誤差評価をも与えるものであり、偏微分方程式に対する解の精度保証の先鞭を付け、その後「中尾の方法」と呼ばれています。

本研究の代表者の劉准教授は菊地氏の手法を発展させ、それを有限要素法の近似解の事前誤差評価にも適用するというアイデアを着想しました。さらに、流れの非圧縮条件を処理するために、Hypercircle 法を拡張することで、ストークス方程式の境界値問題に対する事前誤差評価式を導いています。この結果は汎用性に優れており、2 次元領域と 3 次元領域の流れの方程式に対しても自然に適用することができます。本研究では、Hypercircle 法を用いた誤差評価法と中尾氏の手法との融合によって、3 次元領域における定常流れの検証法を提案しその有効性を実証することができました。

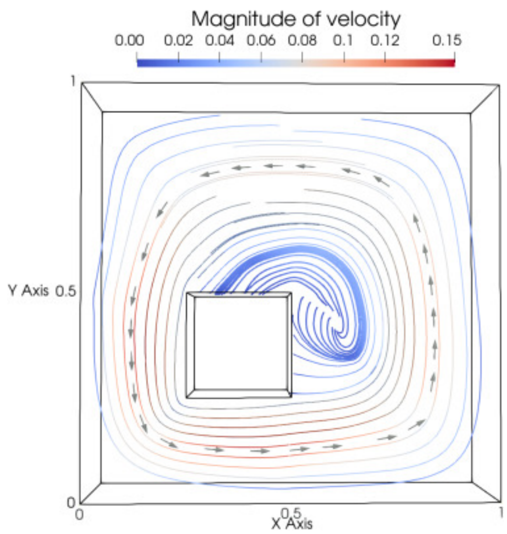


図 2：計算機援用証明で検証した流れの例

本研究では、図 2 のような穴のある 3 次元領域における定常流れの検証例を報告しました。純粋に理論のみの方法によっても定常流れの解析はある程度可能ですが、本

研究で報告した例では、既存の理論手法の適用条件が満たされず、単純な理論解析では流れの存在証明は困難です。したがって本検証例により、提案した計算機援用証明法の有用性が十分立証されたということができます。

III．今後の展開

本研究では、レイノルズ数（注 13）が小さい流れの検証例が挙げられました。今後は、よりレイノルズ数の大きい流れに対する検証法の開発を目指します。また、本研究成果を基盤にして、定常の流れに限らず、時間によって変化している初期値問題の流れの検証も構想しています。したがって、本研究で提案した定常解の検証方法は「ミレニアム懸賞問題」の解決にも大きく寄与することが期待されます。

IV．研究成果の公表

本研究成果は、2022 年 1 月 4 日、Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation 誌に掲載されました。

論文タイトル：Computer-assisted proof for the stationary solution existence of the Navier–Stokes equation over 3D domains

著者：劉　雪峰（新潟大学）、中尾　充宏（早稲田大学）、大石　進一（早稲田大学）

doi: 10.1016/j.cnsns.2021.106223

V．謝辞

本研究は、科学研究費補助事業（20KK0306、20H01820、21H00998、18K03411、18K03434、21K03378）、戦略的創造研究推進事業 CREST（JPMJCR14D4）の支援を受けて行われました。

【用語解説】

（注 1）解の滑らかさ：偏微分方程式の場合、弱い意味での解（弱解という）を求め、それがどの程度の連続性や微分可能性をもつかが重要な問題であり、それを解の滑らかさと呼んでいる。

（注 2）計算機援用証明：計算機による計算結果を利用した数学的厳密証明のこと。

（注 3）定常流れ（定常解）：時間的に流れ（解）の様子（速度、圧力、密度など）が変化しない流れである。

（注 4）境界値問題：微分方程式の解を、それが定義される領域の境界上の値に制限（境界条件）を付けて求める問題のこと。

（注 5）非線形偏微分方程式：未知関数について線形でない偏微分方程式のこと。

（注 6）離散化誤差：連続関数をコンピュータで有限個の関数値を利用して処理することに起因する誤差である。数学的には、無限次元問題を有限次元で近似する場合の誤差ともいえる。
（注 7）丸め誤差：コンピュータを用いて数値計算を行うとき、有限桁の数字しか処理できないことに起因する誤差である。
（注 8）非圧縮条件：流体が流れるとき密度が変化しないという制約条件。
（注 9）微分作用素の固有値問題：微分という演算に関してスケールが変わっても形状が保持される場合について、その数値（固有値）と対応する関数（固有関数）を求める問題のこと。
（注 10）事前誤差評価：数値計算手法を利用して方程式を解析するとき、近似解を求める前に数理的考察により誤差を評価・推定すること。
（注 11）有限要素法：方程式が定義された領域を小領域（要素）に分割し、各小領域における方程式を比較的シンプルな関数で近似する手法である。 構造力学分野で発達し、偏微分方程式の数値計算の手法として広く使われている。
（注 12）事後誤差評価：数値計算手法を利用して方程式を解析するとき、実際に得られた近似解を用いて誤差を評価すること。
（注 13）レイノルズ数：流れを特徴づけるために利用される指標である。低いレイノルズ数の場合、滑らかで安定な流れが特徴である。高いレイノルズ数の場合、無秩序な渦や不安定な流れが特徴である。

本件に関するお問い合わせ先
新潟大学理学部
准教授　劉　雪峰（リュウ　シュウフォン）
E-mail：xfliu@math.sc.niigata-u.ac.jp